

Maandblad voor
de didactiek
van de wiskunde

Orgaan van
de Nederlandse
Vereniging van
Wiskundeleraren

54e jaargang
1978/1979
no. 3
november

Wolters-Noordhoff

EUCLIDES

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren. Het blad verschijnt 10 maal per cursusjaar.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Secretaris: Drs. J. W. Maassen, Traviatastraat 132, 2555 VJ Den Haag.
Penningmeester en ledenadministratie: Drs. J. van Dormolen, Lange Voort 207, 2343 CD Oegstgeest. Postrekening nr. 143917 t.n.v. Ver. v. Wiskundeleraren, te Amsterdam.
De contributie bedraagt *f* 35,— per verenigingsjaar; studentleden en Belgische leden, die ook lid zijn van de V.V.W.L. *f* 25,—; contributie zonder Euclides *f* 15,—.
Adreswijziging en opgave van nieuwe leden (met vermelding van evt. gironummer) aan de penningmeester. Opzeggingen vóór 1 augustus.

Artikelen ter opname worden ingewacht bij Drs. G. Zwaneveld, Haringvlietstraat 9II, 1078 JX Amsterdam, tel. 020-738912. Zij dienen met de machine geschreven te zijn met een marge van 5 cm en een regelafstand van 1 1/2.

Boeken ter recensie aan Dr. W. A. M. Burgers, Prins van Wiedlaan 4, 2242 CD Wassenaar, tel. 01751-13367.

Mededelingen, enz. voor de redactie aan Drs. S. A. Muller, Van Lynden van Sandenburglaan 63, 3571 BB Utrecht, tel. 030-710965.

Opgave voor deelname aan de leesportefeuille (buitenlandse tijdschriften) aan Dr. A. J. E. M. Smeur, Dennenlaan 17, 4849 BD Dorst (N.B.).

Abonnementsprijs voor niet leden *f* 33,50. Een collectief abonnement (6 exx. of meer is per abonnement *f* 19,50. Niet leden kunnen zich abonneren bij: Wolters-Noordhoff bv, afd. periodieken, Postbus 58, 9700 MB Groningen. Tel. 050-162189. Giro: 1308949.
Abonnees wordt dringend verzocht te wachten met betalen tot zij een acceptgirokaart hebben ontvangen.
Abonnementen gelden telkens vanaf het eerst volgend nummer. Reeds verschenen nummers zijn op aanvraag leverbaar na vooruitbetaling van het verschuldigde bedrag.
Annuleringen dienen minstens één maand voor het einde van de jaargang te worden doorgegeven.
Losse nummers *f* 5,80 (alleen verkrijgbaar na vooruitbetaling).

Advertenties zenden aan:
Intermedia bv, Prinses Margrietlaan 1, Postbus 371, 2404 HA Alphen a/d Rijn. Tel. 01720-62078/62079. Telex 33014.

Onwaar versus onzinnig

CHENG SHAN-HWEI en J. W. NIENHUYS

1 Los op in $\mathbb{R}$

$$\sqrt{x} > 2x - 1.$$

De leerling die deze opgave onder ogen krijgt, moet begrijpen dat hij of zij dient te bepalen

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid \sqrt{x} > 2x - 1\}.$$

Als we nu ook nog vragen op te lossen in $\mathbb{R}$

$$\sqrt{x} \leqq 2x - 1$$

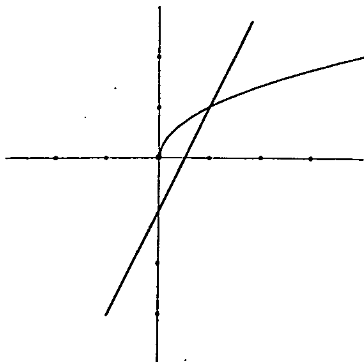
dan verkrijgt de leerling een verzameling B

$$B = \{x \in \mathbb{R} \mid \sqrt{x} \leqq 2x - 1\}.$$

Maar B is niet het complement van A in $\mathbb{R}$. Immers $A = [0,1\rangle$ en $B = [1, \rightarrow\rangle$. Toch voelt ieder wel aan dat er verband is tussen A en B. Maar welk verband is dat dan? Is C, gedefinieerd door

$$(*) \quad C = \{x \in \mathbb{R} \mid \neg(\sqrt{x} > 2x - 1)\}$$

hetzelfde als B? Of zit -1 wel in C maar niet in B?
Vredenduin heeft aangegeven hoe men (*) zou kunnen interpreteren. In die interpretatie is C het complement van A. In paragraaf 2 geven we een samenvatting van Vredenduins uiteenzetting. In paragraaf 3 geven we een bezwaar tegen Vredenduins oplossing. Het bezwaar komt hierop neer, dat B niet hetzelfde is als C. In paragraaf 4 geven we aan hoe men dit soort problemen kan omzeilen door onderscheid te maken tussen onwaar en onzinnig – en het laatste niet toe te staan in de wiskunde.
Zoiets is natuurlijk heel gebruikelijk in de wiskunde. Regels om onzin te vermijden zijn tamelijk eenvoudig, zoals we met een paar voorbeelden zullen laten zien.



Vraag: Voor welke reëele x is het reëele getal $\sqrt{x}$ meer dan $2x - 1$? Antwoord: De vraag is fout. 'Het' reëele getal $\sqrt{-1}$ bestaat niet.

Toch houden wiskundeboeken voor het voortgezet onderwijs zich niet altijd aan die regels. Daarom zou toepassen van die regels nogal radicaal lijken. In paragraaf 5 geven we nog een paar algemene argumenten die pleiten voor een scherp onderscheid tussen onwaar en onzinnig.

2 *De oplossing van Vredenduin.* In 1975 heeft Vredenduin [4] uitgelegd dat we moeilijkheden krijgen als we op de gewone manier het complement vormen van

$$V_1 = \{y \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{y} > 0\}.$$

want als

$$V_2 = \{y \in \mathbb{R} \mid \neg (\frac{1}{y} > 0)\}$$

dan zit 0 niet in $V_1 \cup V_2$.
Volgens [4] merkte Lourens van den Brom eens op dat

$$\frac{a}{b} = 0 \Leftrightarrow (a = 0 \wedge b \neq 0)$$

onjuist is, omdat voor $b = 0$ het rechterlid onwaar is en het linkerlid onzinnig. Vredenduin lost dit probleem als volgt op. Hij suggereert dat we niet naar de definitie van a/b (of $1/x$) moeten kijken, maar naar de definitie van de uitspraak $a/b = c$ (of $1/x > 0$).
Die definitie is 'de unieke oplossing van $bx = a$ is c', of wel '$x = c$ is oplossing van $bx = a$' èn '$bx = a$ heeft geen andere oplossing dan c'.
In formulevorm luidt dit

$$(1) \quad bc = a \wedge \quad \forall x : x \neq c \Rightarrow bx \neq a,$$

en in die formulering staat het ook in [4].
Op deze wijze kan men $1/y > 0$ in bovenstaande V_1 en V_2 veranderen in een uitspraak die ook voor $y = 0$ zinvol (en onwaar) is. Voor zo'n uitspraak $P(y)$ zou men kunnen nemen

$$(2) \quad (\exists x : (yx = 1 \wedge \forall z : z \neq x \Rightarrow yz \neq 1)) \wedge \forall x : yx = 1 \Rightarrow x > 0.$$

Dat is een hele mondvol, maar als je goed kijkt zie je dat het eerste stuk tussen kleine haakjes zegt dat er één x is met $1/y = x$, en het tweede stuk zegt dat een oplossing van $yx = 1$ groter is dan nul.
Vredenduin geeft $P(0)$ verkort (en tamelijk slordig) weer als volgt:

$$\exists x : \frac{1}{0} = x \wedge x > 0.$$

In elk geval is $P(0)$ niet waar, dit kunnen we gemakkelijk inzien. Als we in de definitie van V_1 en V_2 de formule $1/y > 0$ vervangen door (2), dan wordt V_2 netjes het complement van V_1.
Ons gevoel zei al dat 0 niet in V_1 zit omdat $1/0$ niet bestaat en dus zeker geen element van de positieve getallen is. Nu is de zin '$1/y$ bestaat niet voor $y = 0$' geen uitspraak in de zin van de propositiecalculus, want 'onbestaanbaar' en 'ongedefinieëerd' zijn adjectieven die slaan op stukjes tekst die er uit zien als wiskunde maar het niet zijn. Vredenduin heeft die zin omgezet in een wiskundige uitspraak, namelijk '$P(y)$ is onwaar voor $y = 0$'.

3 *Bezwaren.* Het nadeel van Vredenduins oplossing is dat op die manier $\neg(1/y > 0)$ niet meer hetzelfde betekent als $1/y \leqq 0$. Want $y = 0$ maakt de eerste uitspraak waar, terwijl de tweede dan onwaar wordt. We geven nu nog een paar voorbeelden om te laten zien wat voor soort problemen er met Vredenduins oplossing kunnen rijzen.

Voorbeeld 3.1 De verzameling C uit de inleiding is nu wel het complement van A, maar niet hetzelfde als B.
Er is geen eenvoudige regel te bedenken waardoor met meteen kan zien dat A en B niet elkaars complement in $\mathbb{R}$ zijn. Immers, hoe men het ook draait, in Vredenduins oplossing zullen de volgende equivalenties niet zonder meer mogen worden toegepast

$$(3) \quad \neg(a \geqq b) \Leftrightarrow b > a$$

$$(4) \quad \neg(a \geqq b) \Leftrightarrow a < b$$

$$(5) \quad \neg(a = b) \Leftrightarrow a \neq b$$

$$(6) \quad \neg(a \in X) \Leftrightarrow a \notin X$$

$$(7) \quad a \notin X \Leftrightarrow a \in X^C$$

Voorbeeld 3.2 Het complement van

$$C = \{x \in \mathbb{R} \mid \sin(1/x) \neq 1\}$$

is – volgens Vredenduins oplossing – niet meer hetzelfde als

$$D = \{x \in \mathbb{R} \mid \sin(1/x) = 1\}.$$

Immers, $x = 0$ zit niet in C en ook niet in D. C en D zijn dus niet elkaars complement in $\mathbb{R}$.
Je kan je er niet goed uitredden door te zeggen dat $a \neq b$ 'eigenlijk' betekent $\neg(a = b)$. Het is niet altijd duidelijk wat je moet doen als je twee beweringsvormen hebt, $p(x)$ en $q(x)$, waarvoor geldt dat $p(x) = \neg q(x)$ voor alle x uit de universele verzameling (en dus ook $q(x) = \neg p(x)$). Het laatste voorbeeld zal dit duidelijk maken.

Voorbeeld 3.3 We nemen voor X de vereniging van het eerste en derde kwadrant in $\mathbb{R}^2$ en we doen de x-as er ook nog bij. Y is wat overblijft van $\mathbb{R}^2$, dus de vereniging van het tweede en vierde kwadrant, met de y-as erbij, maar met (0,0) weggelaten. Volgens Vredenduins oplossing zijn nu

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \neg((x, \sqrt{y}) \in X)\}$$

en

$$F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x, \sqrt{y}) \in Y\}$$

niet hetzelfde, want het punt $(0, -1)$ zit wel in E maar niet in F.
Als we de uitspraak die E definieert geleidelijk laten veranderen, dan komt er achtereenvolgens

$$\neg((x, \sqrt{y}) \in X), \quad (x, \sqrt{y}) \notin X, \quad (x, \sqrt{y}) \in X^C, \quad (x, \sqrt{y}) \in Y.$$

Een van de eerste twee overgangen is niet meer juist in Vredenduins oplossing. Met andere woorden, (6) en (7) mogen in die oplossing niet allebei gelden.

4 *Een radicale oplossing.* We willen graag dat we met verzamelingen en uitspraken in de wiskundige taal alle gebruikelijke dingen mogen doen. We willen kunnen overgaan van uitspraak op verzameling en omgekeerd, en ontkenningen en complementen vormen. Dat laatste is erg nuttig, bijvoorbeeld als we uit het ongerijmde redeneren. En tenslotte zouden we liever niet hoeven te onthouden wat het subtiele verschil is tussen $\neg(a < b)$ en $b \leqq a$ en $a \geqq b$ onderling, of tussen $\neg(t \in X)$, $t \notin X$ en $t \in X^C$. En als we dieper de wiskunde induiken, willen we niet weer voor verrassingen komen te staan.
In [4] schrijft Vredenduin: 'In deze [algemeen aanvaarde tweewaardige] logica komen geen taalvormsels voor die de structuur van een uitspraak hebben, maar die bij nader inzien betekenisloos zijn. [. . .] In ons taalsysteem komen derge-

lijke taalvormsels wel voor'.
Onze oplossing is de volgende: we passen gewoon de wiskundige taal aan de logica aan. Dit doen we door zinloze uitdrukkingen te VERBIEDEN.

Zoiets is in de rekenkunde allang gebruik: daar zijn $\frac{1}{0}$ en $\frac{0}{0}$ verboden en ook een formule als

$$1 \text{ appel} + 1 \text{ ei} = 55 \text{ cent}$$

vinden we niet goed. Je mag geen appels bij eieren optellen, zeggen we dan. Een onderdeel van het verbod dat wij nu voorstellen is het voorschrift dat in wiskundige formules waarin letters voorkomen, we in principe moeten vertellen wat die letters betekenen. Verder moeten we zorgen dat voor elke toegestane waarde van de letters de uitspraak zinvol is. Nu komen een paar voorbeelden om het verbod op zinloze uitdrukkingen te illustreren.

Voorbeeld 4.1 $\forall a \forall b : \frac{a}{b} = 0 \Leftrightarrow (a = 0 \wedge b \neq 0)$

Dit is niet goed, want er staat niet bij welke waarden a en b mogen hebben.

Voorbeeld 4.2 $\forall a \in \mathbb{R} \, \forall b \in \mathbb{R} : \frac{a}{b} = 0 \Leftrightarrow (a = 0 \wedge b \neq 0)$

Dit is nog steeds niet goed want voor $a = 1$ en $b = 0$ komt er iets onzinnigs achter de dubbele punt.

Voorbeeld 4.3 $\forall a \in \mathbb{R} \, \forall b \in \mathbb{R}, b \neq 0 : \frac{a}{b} = 0 \Leftrightarrow (a = 0 \wedge b \neq 0)$

Dit is goed maar nogal onbeholpen.

Voorbeeld 4.4 $\forall a \in \mathbb{R} \, \forall b \in \mathbb{R}, b \neq 0 : \frac{a}{b} = 0 \Leftrightarrow a = 0$

Dit is veel beter. Het geeft ook precies aan wat we mogen doen met de formule $a/b = 0$. Of deze formule nu een conclusie of een premisse is, we moeten eerst nagaan dat b niet nul is.

Voorbeeld 4.5 $\forall a \in \mathbb{R} \, \forall b \in \mathbb{R} : b \neq 0 \Rightarrow (\frac{a}{b} = 0 \Leftrightarrow a = 0)$

Dit is weer onjuist, want voor $b = 0$ en $a = 1$ verschijnt er ergens achter de dubbele punt iets onzinnigs.
Misschien is dit niet helemaal duidelijk. Men zou kunnen tegenwerpen, als b niet nul is, dan is het tweede lid van de implicatie toch waar?
Maar zo praten we langs elkaar heen. Het gaat er niet om of een bewering juist lijkt nadat we haar in de (niet-wiskundige) omgangstaal hebben weergegeven,

zo goed en kwaad als dat kan. In dit geval gaat het erom of voor alle toegestane waarden van a en b een onbetwijfelbaar correcte propositie ontstaat. Een verder gevolg hiervan is dat men het pijltje $\Rightarrow$ bij het opschrijven van een wiskundige redenering alleen maar moet gebruiken voor beweringen en niet voor redeneringen.

$$1 = 1 \Rightarrow \text{Elk vierkant is een rechthoek}$$

is een correcte propositie, maar als men dit als een redenering opvat kan men op zijn minst aanmerken dat een paar stapjes in die redenering zijn overgeslagen. Wanneer men het korte en krachtige Nederlandse 'dus' door een symbool wil weergeven, kan men daar heel wel het ouderwetse $\therefore$ voor gebruiken.

Voorbeeld 4.6 Vraagstuk 13 op pag. 3 van [1] luidt: 'Gegeven twee verschillende verzamelingen V en W en een functie f van V naar W. Geldt voor iedere $U \subset V, f(U) \subset B_f \Rightarrow U \subset D_f$.?'
Bij de beantwoording dient de leerling er rekening mee te houden dat op pag. 2 is afgesproken dat de notatie $f(X)$ alleen mag worden gebruikt als $X \subset D_f$. Dit is tegen de richtlijnen van de Nomenclatuurcommissie [5]. Volgens die richtlijnen mag men wèl spreken over het f-beeld van X, ook als niet geldt $X \subset D_f$, maar men mag niet de notatie $f(X)$ daarvoor gebruiken.
Het antwoordenboekje van [1] geeft 'ja', dat wil zeggen, ook als U niet bevat is in D_f, is de uitspraak waar. Daaruit volgt dat onder die omstandigheid onzinnig ($f(U)$ bevat in B_f) voor onwaar wordt verklaard. Ons verbod zou dit afkeuren.

Voorbeeld 4.7 Op pag. 20 van [1] wordt gevraagd of $\forall\, x \in D_f : \phi\,(x) = g(f(x))$ waar is voor ieder drietal functies f, g, en ϕ als gegeven is dat $\phi = gof$. In [1] wordt gof gedefinieerd door $x \rightarrow g(f(x))$. Nu is voor sommige $x \in D_f$ misschien $g(f(x))$ niet gedefinieerd, maar dan is ϕ het ook niet en omgekeerd.
Voor zulke x gaat de uitspraak over in

'iets ongedefinieerds = iets ongedefinieerds'.

Dit is een onzinnige uitspraak. Dus voor sommige x in D_f is $\phi(x) = g(f(x))$ waar, voor andere is het onzin. Het antwoordenboekje geeft hier 'nee', dus ook hier vinden de auteurs dat onzinnig hetzelfde is als onwaar. Waarschijnlijk zijn de auteurs ook van mening dat niet voor alle reëele x geldt $\log x = \log x$. In een leerboek is dat ongewenst, zeker als die afspraak (onzinnig is onwaar) nergens met zoveel woorden genoemd wordt en als die afspraak aanleiding kan geven tot problemen zoals we hier boven hebben genoemd.

Voorbeeld 4.8 De Nomenclatuurcommissie [5] keurt het volgende goed.

$$f : x \rightarrow \sqrt{100 - 4x^2} \qquad \text{van } \mathbb{R} \text{ naar } \mathbb{R}.$$

Volgens het verbod dat wij voorstellen, moet er ergens duidelijk bijstaan dat x niet alleen reëel moet zijn maar ook nog dat $x \in [-5, +5]$. Het is dus verstan-

diger om meteen te schrijven

$$f : x \to \sqrt{100 - 4x^2} \qquad \text{van } [-5, +5] \text{ naar } \mathbb{R}.$$

(Over het voorschrift van [5] zijn al meer opmerkingen gemaakt, men raadplege [2] en [3] en de daar geciteerde literatuur).

Voorbeeld 4.9 Het volgende valt ook onder het verbod:

$$\exists x \in \mathbb{R} : \frac{1}{x} > 0.$$

Op het eerste gezicht lijkt dit haarkloverij, maar laten we de ontkenning eens opschrijven:

$$\forall x \in \mathbb{R} : \frac{1}{x} \leqq 0.$$

Deze is ook voor het gevoel veel duidelijker onzinnig. Als de ontkenning van een bewering onzinnig is, dan is de bewering zelf het ook.

Voorbeeld 4.10 Nu weten we ook hoe we het beste kunnen uitleggen hoe je $\sqrt{x} > 2x - 1$ moet oplossen. Dit moet men niet in $\mathbb{R}$ doen, maar in het gemeenschappelijk definitiegebied van alle betrokken functies. De vraag is dus naar

$$A = \{x \in [0, \to > \mid \sqrt{x} > 2x - 1\}.$$

Nu is A ook het complement van

$$B = \{x \in [0, \to > \mid \sqrt{x} \leqq 2x - 1\}.$$

In het algemeen moet men een probleem als 'Los V op in A', waarin V de een of andere relatie, gelijkheid of ongelijkheid is en A een verzameling, interpreteren als 'Bepaal $\{\ldots \in A \mid V\}$'; op de stippeltjes hoort de naam van de op te lossen variabele te staan. Desgewenst kan men A ook omschrijven door bijvoorbeeld 'het gemeenschappelijk definitiegebied van alle betrokken functies', maar fraai is dat niet.

5 *Motivering.* In paragraaf 3 hebben we een 'technische' reden gegeven om ons verbod te verdedigen. We willen nu een paar algemenere redenen geven, die meer het karakter hebben van opinies.

5.1 We hebben al genoemd dat het verbod op onzin bij de elementaire rekenkunde allang bestaat. Daaraan kunnen we toevoegen dat men in de academische wiskunde ook tamelijk precies is.

De meeste wiskundigen in binnen- en buitenland zouden dan ook niet begrijpen waarom wij onze oplossing 'radicaal' noemen in plaats van 'gangbaar'. Waarschijnlijk wordt 'ons' verbod impliciet ook nageleefd bij het voortgezet onder-

wijs buiten Nederland. Waarom zouden onze scholen dan achterblijven?
5.2 De wiskundige standaarden van precisie veranderen voortdurend, ook nu nog. Wat nog niet zo lang geleden als streng gold is vaak nu al onbegrijpelijk door de gebrekkige formulering. Als wij meegaan met de ontwikkelingen naar grotere duidelijkheid en nauwkeurigheid, zullen wij de essentie van wat wij de leerlingen vertellen beter begrijpen.
5.3 Verzamelingen, logische symbolen en kwantoren bij het voortgezet onderwijs zijn waardevol, mits in bescheiden mate toegepast.
Anderzijds, de inspanning en de tijd nodig om de leerlingen met die zaken vertrouwd te maken kunnen op een andere manier minstens even nuttig worden gebruikt. Men denke aan eenvoudige toepassingen van de wiskunde of aan het stimuleren van ruimtelijk inzicht.
Wanneer we nu toch kiezen voor verzamelingen enz., kunnen we het beter goed (= correct) doen.
Het verbod dat wij hier uitgelegd hebben hoeven we niet zo omstandig en uitvoerig toe te lichten voor leerlingen. Maar als de leerlingen meteen een consistente notatie leren, komen ze later niet in de war. Het optimisme van [5], pag. 252*a* bovenaan, delen we niet.
Een flink aantal B-leerlingen van het VWO kiest een exacte of technische opleiding. Het wiskunde onderwijs dat ze dan krijgen, begint veelal met ze van alles af te leren, en dat valt niet altijd mee.
5.4 Het verschil tussen onwaar en onzinnig is buiten de wiskundeles zo belangrijk, dat het in de wiskundeles best wel eens ter sprake mag komen. Die wiskundeles ontbeert toch al zoveel contact met niet-wiskundige zaken. In de ogen van een bekend wetenschapsfilosoof, Popper, is het essentiële van de wetenschappelijke methode dat zij de natuur vragen stelt die tenminste duidelijk met nee te beantwoorden zijn. Beweringen die gaan over ondefinieerbare begrippen en die zo vaag zijn dat èlk feit ze lijkt te bevestigen, onzin dus, horen niet in de wetenschap thuis.
Leerlingen bij het Voorbereidend Wetenschappelijk Onderwijs kunnen er niets dan voordeel bij hebben als ze onzin van onwaar leren onderscheiden.

Referenties

[1] K. de Bruin, A. Kelfkens, D. Leujes, P. C. Schnetz, H. Steur, A. H. Syswerda, R. A. J. Vuyk, *Getal en ruimte*, deel 5/6 VI, 4e druk, Tjeenk Willink/Noorduijn, Culemborg 1976.
[2] Hans Freudenthal, *Nomenclatuur en geen einde*, Euclides 49 (1973–1974) p. 53–57.
[3] A. J. Th. Maassen, *De voorgestelde nomenclatuur*, Euclides 51 (1975–1976) p. 301–314.
[4] P. G. J. Vredenduin, *Logische Perikelen*, Euclides 51 (1975–1976) p. 350–354.
[5] Eindrapport Nomenclatuurcommissie, Euclides 48 (1972–1973) p. 241a–274a.

Over de auteurs:

Cheng Shan-Hwei is lerares wiskunde aan het Hertog Jan College te Valkenswaard. Jan Willem Nienhuys, echtgenoot van Cheng Shan-Hwei, is verbonden aan de T.H. Eindhoven, en geeft instructie in de algebra en de analyse aan beginnende wiskunde studenten.

Vakdidaktische notities

FRED GOFFREE

11 Matematisch didaktisch praktikum

Een leraar wiskunde & didaktiek aan de pedagogische akademie heeft het grote voorrecht dat hij zijn studenten ook in hun toekomstig werkterrein, het basisonderwijs, mag begeleiden. Het is een voorrecht omdat hij wiskundeonderwijs daarbij op enige afstand kan beschouwen, terwijl hij – in 't algemeen – zich toch sterk erbij betrokken voelt en er een grote verantwoordelijkheid voor draagt. De afstandelijkheid stelt hem voortdurend in de gelegenheid om zijn kennis van het vak te vergroten. Wie basisschoolleerlingen, P.A.-studenten en onderwijzers aan het werk ziet, ervaart wiskunde als een menselijke aktiviteit en leert met betrekking tot het onderwijzen en leren van wiskunde.
Ben je evenwel als leerplanontwikkelaar verbonden aan een (ontwerp) P.A., om daar bijvoorbeeld samen met de kollega's een programma voor je vak te ontwikkelen, dan is het voorrecht nog groter. Zowel in de P.A.-lessen – en vooral kort daarna – als in de basisschool wordt je de mogelijkheid geboden om wiskunde leren, wiskunde onderwijzen en leren wiskunde onderwijzen te observeren. Vanzelfsprekend laten we het niet bij observeren, ook het veld van de wiskunde & didaktiek dient tenslotte in toenemende mate georganiseerd te worden. Belangrijke observaties – wat op een zeker moment belangrijk geacht wordt hangt af van vele faktoren, waaronder de mate van organisatie tot nu toe en de wijze waarop de observator die ziet – worden verzameld en dienstbaar gemaakt aan de ontwikkeling van het vakgebied.

Een dergelijke observatie, gedaan in een Gorinchemse oefenschool, vormt de kern van deze notitie. Ik laat het niet bij de observatie alleen; ze is verwerkt tot een matematisch didaktische opgave. Ook bij het stellen van deze opdracht blijven we niet stilstaan. De opdracht is inmiddels uitgevoerd door onderwijsgevenden met zeer verschillende achtergronden: derde jaars P.A.-studenten uit Hengelo, P.A.-docenten voor alle vakken op één P.A., wiskundedocenten aan Engelse Universiteiten met een opleiding voor onderwijzers, derde en vierde jaars studenten voor B. Ed in Nottingham, en straks, zo hoop ik, een aantal kollega's uit Nederland die deze Euclides in handen kregen.
In de diskussies kwam een zeer merkwaardig verschijnsel naar voren. Het bleek dat in alle genoemde groepen ongeveer hetzelfde proces (van didaktiseren) werd doorgemaakt.
Ook dit (standaard?) proces wil ik hieronder beschrijven. U kunt het eventueel

gebruiken als vergelijkingsmateriaal indien u de didaktische uitdaging zelf heeft aangenomen.

We beginnen met de observatie.
Rob, tweedejaars student, heeft zich voorgenomen om met leerlingen uit de vijfde klas de staartdeling eens nader te bekijken. Als ze het algoritme (de manier van werken) kunnen uitvoeren, dàn wil hij nagaan of dat automatisch, met of zonder inzicht verloopt.
Anja en Mark zijn de vijfdeklassers, die Rob heeft gevraagd voor een oriënterend gesprekje. Het eerst probleem ligt voor hun; op het kladblaadje staat 6/2734\. Rob wil, voordat ze gaan staartdelen, even weten of de kinderen enige betekenis aan die deling kunnen geven. Maar zijn vraag in die richting wordt niet begrepen. Heb je wel eens van *verdelen* gehoord?, vraagt hij dan. Jawel hoor, Mark begrijpt het nu. Hij schrijft op 2/2734\. Dan deel je het eerlijk, voegt hij eraan toe. Rob gaat met deze gedachte mee. De – nu eenvoudige – staartdeling wordt uitgevoerd:

```
2/2734\1367
  2
  -
  07
   6
  --
   13
   12
   --
    14
    14
    --
     0
```

Ja, maar we moesten niet met z'n tweeën vèrdelen, maar met z'n zessen!
Rob kijkt vol verwachting zijn leerlingen aan.
Anja: Goed, dan delen we nog een keer door 2, en dan – het antwoord – nog een keer.
Rob moet nu zelf nadenken. Laten we het maar eens doen, zegt hij.

De vraag aan de praktikanten luidt:
≫ Hoe kun je uitleggen dat Anja's voorstel – drie keer achtereenvolgens delen door 2 – hetzelfde is als delen door 8?
Voor degenen onder de lezers, die de uitdaging aannemen, noem ik enkele punten waarop de didaktische diskussie rond de oplossing zich koncentreerde. Ze betreffen: de interpretatie van de begrippen konkreet en abstrakt, het signaleren van een getalsmatige instelling, de werking van materiaalfaktoren, het inspireren tot mentale aktiviteiten en de waarde van het bewustmaken en struktureren.
Nog één belangrijke aanwijzing vooraf. Wie gaat didaktiseren moet niet vergeten zijn gedachteneksperiment – hier in verband met het uitleggen – ook in details, en indien nodig materieel *uit te voeren*.

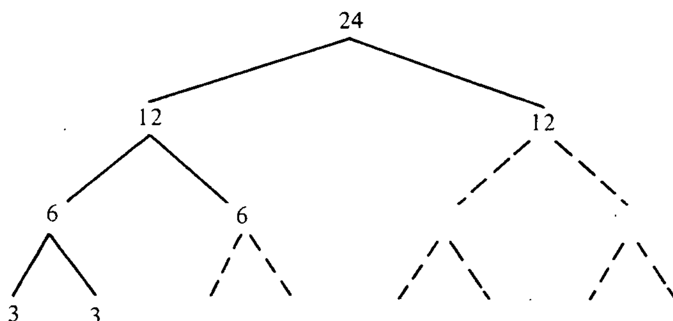
Deze hint, ook tijdens het begeleiden van het praktikum gedaan, bracht vaak het proces van didaktiseren weer op gang.
Welnu, de vraag is dus: hoe zou u het uitleggen?

In alle groepen, waarin de bovengenoemde vraag beantwoord werd, bleek zich ongeveer het volgende 'didaktiserings-proces' te ontwikkelen.

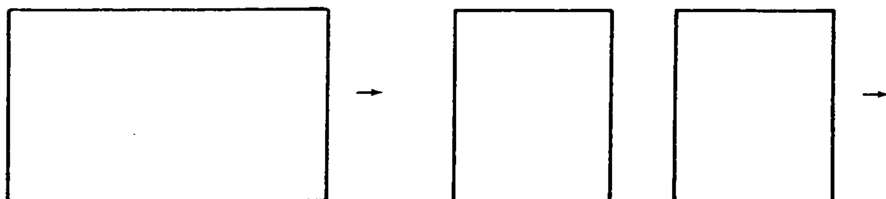
1 Ik zou ook laten delen door *6*. Dan zien ze dat het fout is . . .
2 Laat het laatste quotient met 6 vermenigvuldigen. Omdat het dan niet klopt moeten ze gaan nadenken . . .
3 Laat delen door 8; je ziet dan onmiddellijk dat er hetzelfde uitkomt . . .
4 Ik zou kleinere getallen nemen, bijvoorbeeld 24. Delen door 2 levert 12, daarna 6, daarna 3. Nu zie je direkt . . .
5 Je kunt in het geval van de gegeven getallen ook het laatste quotient met 8 vermenigvuldigen . . .
6 Misschien is het beter om drie achtereenvolgende keren met 2 te vermenigvuldigen.

Afhankelijk van de praktikanten komt er tijdens of na de bovengeschetste getalsmatige benadering wel iemand met de gedachte om het op konkreet niveau uit te gaan leggen; 'de kinderen zijn tenslotte ongeveer 10 jaar'.

7 Goed, laten we het konkreet maken (sic!). Neem knikkers. Natuurlijk 24 stuks. Dan maak je eerst 2 hoopjes van 12, dan weer twee van 6 en tenslotte 2 van 3.
8 De bovenstaande uitleg werd niet echt (met materiaal) uitgevoerd. Als iemand toch de gedachtengang probeert in beeld te brengen, rijzen er moeilijkheden: Het aantal keren *ver*delen komt niet (in konkreto) overeen met het aantal keren delen:



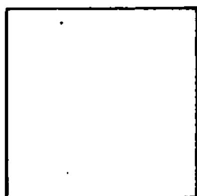
9 Misschien kun je beter een blaadje nemen en dat in tweeën scheuren.



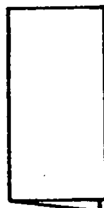
Herhaal dit . . . Hier stuit men op dezelfde moeilijkheden als die in 8 werd geschematiseerd.

10 Een verbetering zou zijn als je het blaadje in tweeën zou scheuren, dan beide delen op elkaar legt, . . . enz.

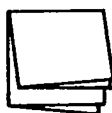
11 In het bovengenoemde geval kun je na drie keer scheuren inderdaad de 8 stukken tellen. Het zijn evenwel losse stukjes, en de struktuur (2 × 2 × 2) is moeilijk terug te vinden. Vandaar dat men voorstelt: Neem een vouwblaadje.



Vouw het in tweeën:



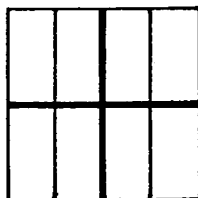
Herhaal dit:



En nog eens: (in tweeën delen)

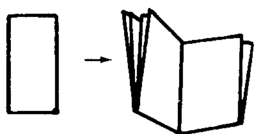


Als je dit nu openvouwt, dan *zie* je de 8 delen!



12 Tenslotte

De 2 × 2 × 2 struktuur, waarom alles hier dient te draaien, is niet zo goed te ZIEN in de twee-dimensionale situatie van vouwblaadje met vouwlijnen. Waarschijnlijk kan de bewustmaking van deze strukturen geschieden door aan het konkrete vouwwerk een mentale aktiviteit toe te voegen:
Als er drie keer gevouwd (gehalveerd, in tweeën gedeeld) is, vraag je: 'hoe ziet het blaadje eruit als ik het nu openvouw?' Een kleine hint kan helpen: je begint met het openvouwen:



Wat denk je?
2 × 2 × 2!

*

Nog even terug naar Rob. De laatste hint en de bijbehorende mentale aktiviteit werkte uitstekend op Anja. Ze kon het zich zo goed voorstellen, dat ze er een schetsje van kon maken, voordat het vouwblaadje geheel open was. Wat Mark betreft kan ik u weinig vertellen; omdat hij ons zo weinig verteld heeft.

Over de auteur:

Fred Goffree, geb. 24-8-1934 in Amsterdam. Hij studeerde daar voor onderwijzer. De wiskundeleraar op de kweekschool, E. H. Schmidt, inspireerde hem tot de wiskunde studie (LO). Het was J. K. Timmer, die hem later door zijn bijzondere aanpak bewoog tot een voortgezette studie in de richting van K-I. Wiskunde beheerste een steeds groter wordend deel van zijn leven.
Toen de oude K-V akte werd veranderd in de nieuwe M.O.B., koos hij de studie voor de laatste. In Utrecht (C.O.C.M.A.) waren het toen vooral leraren als Dr. H. Streefkerk en Drs. J. de Jong die grote gebieden van de 'moderne' wiskunde toegankelijk voor hem maakten. Direkt na het behalen van de akte (1961) kwam de CMLW met heroriënteringskursussen voor leraren. Het ging nog steeds over wiskunde. Pas in samenspraak en samenwerking met Edu Wijdeveld en Adri Treffers, op het eind van de zestiger jaren, kwam voor hem de mens bij het wiskunde bedrijven in beeld. Fundamentele didaktische diskussies op het I.O.W.O., na 1971, kwamen daarna binnen zijn bereik, vooral door de bijdragen van Prof. H. Freudenthal.
In die tijd studeerde hij, uit louter belangstelling voor de menselijke kant van het onderwijzen, onderwijskunde. Vooral Pieter Span kreëerde ruimte voor een integrale benadering van de beide vakgebieden van wis- en onderwijskunde.
Momenteel tracht hij de verworvenheden enerzijds ten dienste van de P.A. wiskunde en didaktiek te stellen, anderzijds verder te ontwikkelen. Zijn vakdidaktische notities getuigen hiervan.

Haakjes

P. G. J. VREDENDUIN

Het bestuur van de NVvW heeft een brief ontvangen van Mej. J. Burmanje (Tilburg) waarin ze inlichtingen vraagt betreffende de volgorde van de bewerkingen vermenigvuldigen en delen. Ze verwijst daarin naar een artikel van P. G. van Genuchten (Deurne) in Omologie jaargang 9 nr. 4, waarin deze schrijft:
Vermenigvuldigen en delen hebben t.o.v. elkaar gelijke prioriteit, juist zoals optellen en aftrekken t.o.v. elkaar gelijke prioriteit hebben . . . .
Waarom nu dit alles met zoveel nadruk?
Het antwoord kan erg eenvoudig zijn: 'omdat het internationaal geldende regels zijn'.
Einde citaat.
Het bestuur heeft me verzocht in een artikel in Euclides op deze kwestie in te gaan, aan welk verzoek ik gaarne voldoe.
Dat gelijkstelling van vermenigvuldiging en deling een internationaal geldende regel was, wist ik niet. Ik ben over de consequenties gaan denken. Ik zou schrijven

$$ab : ab = 1 \text{ en } ab/ab = 1$$

Dat komt mij zo normaal voor, dat ik me niet kan voorstellen, dat het in strijd zou zijn met internationale conventies. Ik geef toe dat dit een buitengewoon zwak argument is. Ik ben dan ook op zoek gegaan in mijn boekenkast. Hier volgen mijn vondsten.
Allereerst de Duitse uitgave Grundzüge der Mathematik. Band 1 (1e druk), blz. 125:

$$a/a' + b/b' = (ab' + a'b)/a'b'$$

Het artikel waarin dit voorkomt, is geschreven door G. Pickert en L. Görke, twee echte internationalen. Volgens hen gaat vermenigvuldigen dus voor delen.
Nu van Duitsland naar Frankrijk. In A. Lentin et J. Rivaud, Eléments d'Algèbre moderne, staat op blz. 38 $a/b = ma/mb$ en op blz. 62 $\alpha : \beta = \alpha\gamma : \beta\gamma$.
Tot slot naar de Verenigde Staten. Algebra I geschreven door Brumfield, Eicholz en Shanks deed een ander geluid horen. Op blz. 21 vond ik: In order to

have no misunderstanding we shall agree that if there are no parentheses in a number expression, then multiplications and divisions are to be performed from left to right before any additions and subtractions. After the multiplications and divisions are done, then additions and subtractions are to be performed, also in order from left to right.
Ik heb natuurlijk verder gekeken in het boek en onderzocht of de schrijver zich aan zijn eigen regel hield. Ik vond veel overbodige haakjes, zoals $[(x + 3y) : y] : t$ (blz. 114), $(rs) : t$ (blz. 117). Dat mag natuurlijk, maar het boezemt geen vertrouwen in in de ernst van de regel. Op blz. 123 staat $(r : s) \cdot s = r$. Ook deze haakjes zijn voor de schrijvers overbodig, maar voor ons niet. Op blz. 132 vind ik $a/b = ka/kb$. Dat is bedenkelijk, want hier overtreden de schrijvers hun eigen conventie. En op blz. 133 wordt het nog gekker. Daar staat $bd(a/b \cdot c/d) = bd/(ac/bd)$. In het linker lid zouden wij voorrang moeten geven aan de vermenigvuldiging van b en c in $a/b \cdot c/d$. De auteurs hoeven echter geen haakjes te zetten om deze voorrang tegen te gaan, want die bestaat bij hen niet. Helaas bederft het rechter lid alles weer, want daar hadden de auteurs haakjes moeten zetten om bd. Op blz. 133 vind ik $(a/b) \cdot (c/d) = ac/bd$. En op blz. 144 achter elkaar $a/b + 0 = a/b$ en $(a/b) \cdot 0 = 0$. Waarom in de eerste uitdrukking geen haakjes en in de tweede wel, terwijl ze volgens de aangenomen regel even overbodig zijn?
In elk geval heb ik geen vertrouwen gekregen in de ernstige bedoeling van de schrijvers, toen ze tussen vermenigvuldigen en delen prioriteit wensten te ontkennen.

Ten slotte heb ik nageslagen het standaardwerk: Florian Cajori, A history of mathematical notations deel 1. Daar vond ik op blz. 274:
If an algebraical term contains : and ×, there is at present no agreement as to which sign be used first. . . . . Some authors follow the rule that the multiplications and the divisions shall be taken in the order in which they occur. Other textbook writers direct that multiplications in any order be performed first.
De jaartallen waarin bovengenoemde boeken zijn uitgegeven, zijn resp. 1958, 1959, 1961 en een in 1974 verschenen reprint van Cajory 1928.
De vraag van mejuffrouw Burmanje om opheldering was voor mij aanleiding om op het probleem van de volgorde van de bewerkingen nader in te gaan.

Het probleem hoe haakjes te zetten en hoe de volgorde van de bewerkingen te kiezen is een probleem dat boeiender is dan op het eerste gezicht lijkt. Ik wil een viertal methoden de revue laten passeren.
Om het probleem duidelijk te stellen, ga ik uit van een eenvoudige kunsttaal. De taal bestaat uit de volgende symbolen:

grondsymbolen	a, b, c, d
symbool voor een unaire bewerking	$-$
symbolen voor binaire bewerkingen	$+, *$
eventueel haakjes	(,)

Bij $-$ kan men denken aan het nemen van het tegengestelde, bij $+$ en $*$ aan optellen en vermenigvuldigen en bij de grondsymbolen mag men denken aan

natuurlijke getallen modulo 4. Men kan ook meer grondsymbolen nemen; dat is voor het vervolg irrelevant.

Nu onze *eerste taal*. In deze taal worden op de volgende wijze termen gedefinieerd:
elk grondsymbool is een term
als t een term is, dan is ook $-t$ een term
als t_1 en t_2 termen zijn, dan zijn ook $(t_1 + t_2)$ en $(t_1 * t_2)$ termen.

Voorbeeld van een term:

$$((a + (-b * c)) * (b + -d))$$

Hoe leest een mens of een computer dit? Hij begint links, gaat naar rechts tot het eerste sluithaakje, dus het haakje achter de c. Daarna gaat hij terug naar het laatste voorafgaande openingshaakje, dus het haakje voor de $-b$. Tussen deze haakjes staat $-b * c$. Dit rekent hij uit. Enzovoorts.
Hieronder nog resp. een voorbeeld en een non-voorbeeld van een term:

$$-(((-a * b) * -(b + d)) + a)$$
$$((-a * b + c) + -d)$$

Een heel simpele taal met een beetje veel haakjes, maar geen regels die ons het leven moeilijk maken.
Ik hoop, dat het duidelijk is dat in deze taal haakjes om bijv. $-a$ overbodig zijn en daarom niet geschreven worden.

De tweede taal. Dat is juist een haakjesvrije taal. De opbouw is als volgt.
De symbolen zijn dezelfde als bij de eerste taal. 'Term' wordt zo gedefinieerd:
elk grondsymbool is een term
als t een term is, dan is ook $-t$ een term
als t_1 en t_2 termen zijn, dan zijn ook $+t_1t_2$ en $*t_1t_2$ termen.
Voorbeeld van een term is

$$+ + -a * -cba$$

Dat ziet er wat ongewoon uit. De computer heeft daar geen last van, maar de mens moet er even aan wennen. Begin rechts en ga naar links, totdat men het eerste teken voor een binaire operatie aantreft. Dat is het teken $*$ links van $-c$. Ga nu weer naar rechts en zoek de twee termen die rechts van het teken $*$ staan. Dat zijn $-c$ en b. Reken uit $* -cb$, dus het produkt van $-c$ en b. Noem dit t. We houden dan over

$$+ + -ata$$

Weer gaan we naar links tot het eerste teken voor een binaire operatie. Ditmaal

is dat het teken $+$ links van $-a$. Rechts daarvan staan de termen $-a$ en t. Reken nu uit $+\ -at$, dus de som van $-a$ en t. Noem deze som t'. We houden over

$$+t'a$$

Reken dit uit en we zijn klaar. (Verondersteld is natuurlijk dat de rekenoperaties gedefinieerd zijn, zodat er iets uit te rekenen valt.)
Deze methode wordt wel de Poolse methode genoemd, omdat ze voor het eerst gebruikt werd door de Poolse logistici.
Ze is oersimpel en onleesbaar voor het niet geoefende oog. Omdat we er weinig voor voelen het oog te oefenen, wordt deze methode niet toegepast.

De derde taal. Weer dezelfde grondsymbolen. Ik zie ervan af een precieze definitie van 'term' te geven. Liever schrijf ik een term op en vertel, hoe die gelezen moet worden.

$$a + \ -b * a * c + \ -d * a$$

Gewoon van links naar rechts lezen. Dus eerst a nemen, er $-b$ bij optellen, de uitkomst met a vermenigvuldigen, die uitkomst met c vermenigvuldigen, dan $-d$ erbij optellen en ten slotte met a vermenigvuldigen.
Ik wil dit de *recht-toe-recht-aan methode* noemen.
En als je nu wat anders wilt, wat dan? Dan zet je haakjes. Dus bijv.

$$a + (-b * a * c) + (-d * a)$$

Nu bij a optellen het produkt van $-b$, a en c en daarbij optellen het produkt van $-d$ en a.
Gemakkelijk en goed leesbaar.
In de eerste en de tweede taal had een unair bewerkingsteken betrekking op de direct rechts ervan gelegen term. Welke dit was, was zonder meer duidelijk. In de derde taal is dat niet steeds het geval. Soms moeten we door middel van haakjes aangeven welke de direct rechts van $-$ gelegen term is. Bijv.

$$a + \ -b * \ -(d + \ -(c * \ -d))$$

De vierde taal. Dezelfde grondsymbolen. De taal wijkt af van de vorige, doordat er een volgorde van de binaire bewerkingen vastgesteld is. Laten we zeggen: eerst $*$ en dan $+$. Dus vermenigvuldigen gaat voor optellen.
Ik schrijf weer op

$$a + \ -b * a * c + \ -d * a$$

Dit dienen we nu te lezen: tel bij a op het produkt van $-b$, a en c en tel bij de uitkomst op het produkt van $-d$ en a.
Ik noem dit de *methode met voorrangsregel.*

En als je nu wat anders wilt, wat dan? Dan zet je haakjes. Dus bijv.

$$(a + \; - b) * a * (c + \; - d) * a$$

Eerst nu a en $- b$ optellen, de uitkomst met a vermenigvuldigen, dan die uitkomst vermenigvuldigen met de som van c en $- d$ en ten slotte nog met a vermenigvuldigen. Ik geneer me dit op te schrijven, want we voelen ons hier helemaal thuis.

Tot slot *onze gangbare taal.* Deze is helaas lang zo simpel niet. We hebben voorrangsregels. Immers: men vaart de Waal op en af. Het zou een klein beetje eerlijker zijn te schrijven: men vaart de Waal (op en af). Immers machtsverheffen gaat voor vermenigvuldigen, vermenigvuldigen voor delen, delen voor worteltrekken en worteltrekken voor optellen en aftrekken. Maar optellen gaat niet voor aftrekken. Men vaart de Waal niet eerst op en dan af, maar op en af. Net zoals men heen en weer loopt als men ijsbeert. Dus een mengsel van de voorrangsmethode en de recht-toe-recht-aan methode. Optellen en aftrekken doen we recht-toe-recht-aan, maar zodra andere bewerkingen in het geweer komen, wordt het rekenen door voorrangsregels geregeld.
Gelukkig hebben we wel het houvast, dat we van links naar rechts lezen. Dat dacht u misschien. Maar zelfs daarin moet ik u teleurstellen. Denk maar aan 2^{3^4}. Als men van links naar rechts leest, staat hier beslist 8^4. Maar neen, zo moeten we het niet lezen. Eerst moeten we 3^4 uitrekenen. Dat is 81. En dan constateren, dat er 2^{81} staat. Dus ook een beetje van rechts naar links lezen.
Verder kan het op de Waal ordentelijk spoken. Als je schrijft $\sqrt{}2a$, dan heb ik de overtuiging dat ieder wel bereid is te varen op de Waal. Maar wat komt er uit $\sqrt{}4 \cdot \sqrt{}9$? Als u voor me zat, zou ik vragen: wie heeft er $\sqrt{}12$? En wie 6? Eerlijk de vingers omhoog. Dus: wie vaart er op de Waal en wie waart er op de Vaal?
Volgens het bijgestelde rapport van de nomenclatuurcommissie, dat u in het Vademecum op blz. 42 vindt, waart ge hier op de Vaal.
Verder verbaas ik me erover, dat de logaritme niet aan bod komt. Dat is toch ook een inverse bewerking van de machtsverheffing.
Ik stel voor:
men vaart de Waal lekker op en af
men vaart de leuke Waal op en af
men vaart de Waal en Linge op en af.
U mag kiezen.
In de vier voorgaande talen was een unaire operatie direct betrokken op de rechts ervan gelegen term. Ook deze regel vinden we in de gangbare taal niet terug. Een unaire operatie is sin. Volgens de genoemde regel zou sin $k\pi$ betekenen: sin k vermenigvuldigd met π. Maar bedoeld wordt de sinus van $k\pi$.
Ten slotte zou men op het eerste gezicht misschien denken, dat ook $\sqrt{}$ en log unaire operaties zijn. Dit is niet juist. Ze zijn binair. Denk maar aan $\sqrt[n]{a}$ en ${}^{g}\log a$. Wel is onze schrijfwijze hier wat afwijkend. Ze is tweedimensionaal in plaats van lineair, net als bij de machtsverheffing. Dat maakt het de mens wat

makkelijker en de computer wat moeilijker.

Ik heb in het voorgaande gepoogd een inzicht te geven in vier consequente talen met vrij eenvoudige structuur en onze gangbare taal. De gangbare komt er wel erg bekaaid af. Wordt het tijd voor actiegroepen? Of voor een commissie die het probleem in studie neemt? Op nationaal of op internationaal niveau? Want nationale reorganisatie maakt buitenlandse literatuur moeilijk leesbaar. Ik wil de vraag niet beantwoorden.
Wel wil ik tot slot bekijken, wat erover gezegd is in het bijgestelde rapport van de nomenclatuurcommissie in het Vademecum. Natuurlijk wilt u weten wie hiervoor aansprakelijk is. Als u boos wilt worden, wordt het dan niet op de nomenclatuurcommissie. Diens schuld is het niet. Ik wil eerlijk bekennen, dat ik de auteur van dit stukje geweest ben en dat het daarna door de CVO aanvaard is.[1])
Ik heb geprobeerd de chaos zoveel mogelijk te beperken. Eerst is de Waal eruit gegooid. Dus:
men vaart dagelijks op en af.
Dat vermenigvuldigen voor delen gaat, is een topic voor onderwijzers. Althans dat was het, toen er nog een toelatingsexamen bestond. Jonge kinderen werden erin getraind, op twaalfjarige leeftijd werd onderzocht of de training resultaat had gehad en daarna lette nooit meer iemand op die volgorde. Waarom dit maar niet geschrapt? Dat kan heel eenvoudig door voor te schrijven, dat uitsluitend de horizontale breukstreep gebruikt wordt. Blijft over:
men vaart op en af.
Dat kan zoveel kwaad niet meer.
Voor het deelteken waren er drie gegadigden: de horizontale breukstreep, de schuine breukstreep / en het deelteken : .
De schuine breukstreep heeft typografische voordelen. Maar de commercie heeft zich neergelegd bij de omstandigheid, dat de horizontale de haakjesmisère voorkomt en dus didactische voordelen heeft. Het deelteken had vroeger twee betekenissen. Soms las je het: gedeeld door, en soms: staat tot. Toen was

$$2 : 3 : 4 = 6 : 9 : 12$$

een waarheid, als je het deelteken las als: staat tot. Maar zodra je het las als: gedeeld door, barstte de bom. Want $\frac{2}{12}$ is niet gelijk aan $\frac{6}{108}$.
Nu schrijft het normaalblad V792, althans het in mijn bezit zijnde ontwerp van december 1952 (uitgegeven door de hoofdcommissie voor de normalisatie in Nederland) voor, dat het teken : uitsluitend gebruikt wordt als verhoudingsteken. Ook al mocht dat later niet aanvaard zijn of gewijzigd, dan nog is de afspraak voor schoolgebruik erg doelmatig. Bovendien heeft ze reeds ingang

[1]) Dit geldt alleen voor dit kleine, op het laatst toegevoegde stukje van het bijgestelde rapport. Het overige deel is van te voren nagezien en gecommentarieerd door alle leden van de nomenclatuurcommissie, het bestuur van de NVvW, de CVO, de inspectie vwo-havo-mavo en de inspectie lbo voorzover dit wiskundigen waren en het CITO.

gevonden bij de formulering van de multiple choice opgaven voor het eind-examen mavo. Vandaar dat dit in het bijgestelde rapport overgenomen is.
Men kan analoge maatregelen nemen t.a.v. de Waal en wortelbalken voorschrijven. Niet ieder wenst dit keurslijf te aanvaarden. Er zijn typografische en in gedrukte tekst ook esthetische bezwaren aan te voeren. Hier dus geen stringente voorschriften. Bovendien zouden de moeilijkheden die dan bij de worteltrekking opgelost worden, onverminderd bij de logaritme blijven bestaan. Dit was de motivering van het stukje in het bijgestelde rapport. Zoals op elke motivering is hierop natuurlijk kritiek mogelijk.

Tot slot nog een verwijzing naar een recreatieopgave in dit nummer betreffende de eerste en de tweede taal.
En de mededeling aan de lezers dat de redactie gaarne mogelijkheid zal geven tot verdere uitwisseling van meningen.
Ik wil wel mijn lafhartige objectiviteit even verlaten en een kleine knuppel in het hoenderhok gooien. De recht-toe-recht-aan methode is wel erg verleidelijk. En dan natuurlijk toegepast op elk lineair verlopend deel van een uitdrukking, dus ook op teller en noemer van een met horizontale breukstreep geschreven breuk, op een machtsexponent, een wortelexponent, een grondtal van een logaritme.

Over reguliere afbeeldingen in R_3

J. DE JAGER

Een bekend probleem: 'Bepaal bij een reguliere lineaire afbeelding A van R_3 naar R_3 het A-beeld van een gegeven vlak V.'
Leerlingen, die in het oplossen van dit soort vraagstukken een zekere routine hebben gekregen, vinden de oplossing vrij snel door gebruikmaking van de transformatieformules $\bar{x} = (A^{-1}) \cdot \bar{x}'$ of door omzetting van V in een vectorvoorstelling en directe afbeelding van A. Indien ze wat minder gehard zijn in deze materie, zal zeker eenmaal het antwoord gegeven worden: "bepaal het A-beeld $\bar{n}'$ van de normaalvector $\bar{n}_V$ van V en het A-beeld $\bar{p}'$ van een plaatsvector $\bar{p}_V$ van V. Het A-beeld V' van V heeft als vergelijking $(\bar{n}', \bar{x}' - \bar{p}') = 0$."
Het merendeel van de leerlingen is snel tevreden met de verklaring, dat genoemde werkwijze alleen dan mag worden toegepast als de eigenschap 'loodrechte stand' gewaarborgd blijft, m.a.w. als A een orthogonale afbeelding voorstelt. Een enkeling geeft zich minder snel gewonnen en bijt zich vast in de idee, dat er een correlatie moét bestaan tussen het A-beeld van de normaalvector van V én de normaalvector van het A-beeld van V.

Is A een orthogonale afbeelding, dan volgt uit V: $(\bar{n}, \bar{x} - \bar{p}) = 0$ ook $(A\bar{n}, A(\bar{x} - \bar{p})) = 0 \Leftrightarrow (A\bar{n}, A\bar{x} - A\bar{p}) = 0 \Leftrightarrow (\bar{n}', \bar{x}' - \bar{p}') = 0$.
Schrijf $(\bar{n}, \bar{p}) = (A\bar{n}, A\bar{p}) = c$ en er volgt uit V: $(\bar{n}, \bar{x}) = c$ zelfs $V' = AV$: $(\bar{n}', \bar{x}) = c$, waarbij $\bar{n}' = A\bar{n}$.

Wat gebeurt er nu als A 'eenvoudig' regulier is?
Om een antwoord op deze vraag te krijgen, is het noodzakelijk te refereren aan de volgende eigenschap:
$(\bar{x}, A\bar{y}) = \sum_i \sum_j a_{ij} x_i y_j$ laat zich door de symmetrie in i en j ook schrijven als $\sum_j \sum_i a_{ji} x_j y_i = (A^T \bar{x}, \bar{y})$ waarbij A^T = getransp. A. Uitgaande van $(\bar{x}, A\bar{y}) = (A^T \bar{x}, \bar{y})$ volgt uit V: $(\bar{n}, \bar{x} - \bar{p}) = 0$ achtereenvolgens $(\bar{n}, A^{-1}A(\bar{x} - \bar{p})) = 0$ (A regulier) $\Leftrightarrow ((A^{-1})^T\bar{n}, A(\bar{x} - \bar{p})) = 0 \Leftrightarrow ((A^{-1})^T\bar{n}, \bar{x}' - \bar{p}') = 0$.
Gevolg: voor elke reguliere lineaire afbeelding A is de vector $(A^{-1})^T\bar{n} = (A^T)^{-1}\bar{n}$ normaalvector voor het A-beeld van V !*)

*) Is de afbeelding A orthogonaal, $((A)^{-1} = (A)^T)$, dan blijkt ook nu inderdaad $(A^T)^T\bar{n} = A\bar{n}$ normaalvector van AV te zijn.

Een eigenschap, die in het dagelijkse gebruik nauwelijks handzamer zal zijn dan een van de twee in de aanhef genoemde methoden, maar vooral reliëf krijgt bij de toepassing in bijzondere vraagstukken.
Als voorbeeld van zo'n toepassing kan de opgave 2b van het schriftelijk examen wiskunde II in 1975 dienen (zie ook Euclides, jrg. 51, nr. 7).
Voor de duidelijkheid hier de volledige tekst:

In R_3 is t.o.v. een orthonormale basis voor elke $p \in \mathbb{R}$ $\begin{pmatrix} p & 0 & -2 \\ -2 & p & 0 \\ 0 & -2 & p \end{pmatrix}$
de matrix van een afbeelding A_p.

a Voor welke p is het A_p-beeld van R_3 een vlak? Stel een vectorvoorstelling van dit vlak op.
b V is het vlak met vergelijking $x_1 - x_2 = 0$. Voor welke p is het A_p-beeld van V een vlak, dat loodrecht op V staat?
c Voor elke $p \neq 2$ is er precies één lijn door $0 = (0,0,0)$, die onder A_p op zichzelf afgebeeld wordt. Bewijs dit. Voor welke p is deze lijn puntsgewijs invariant?

Het is eenvoudig na te gaan, dat A_p regulier is voor het geval $p \neq 2$.
A_2 is singulier en beeldt vlak V af op een lijn.
Is A_p regulier, dan vinden we voor $(A^{-1})^T$ de matrix: $\frac{1}{p^3-8}\begin{pmatrix} p^2 & 2p & 4 \\ 4 & p^2 & 2p \\ 2p & 4 & p^2 \end{pmatrix}$;

het $(A^{-1})^T$-beeld van $\bar{n}_V = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, geeft $\bar{n}_{V'} = \frac{1}{p^3-8}\begin{pmatrix} p^2 & 2p & 4 \\ 4 & p^2 & 2p \\ 2p & 4 & p^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} =$

$\frac{1}{p^3-8}\begin{pmatrix} p^2-2p \\ 4-p^2 \\ 2p-4 \end{pmatrix}$. Omdat $p \neq 2$ kan voor $\begin{pmatrix} p \\ -p-2 \\ 2 \end{pmatrix}$ als normaalvector van

V' gekozen worden en levert het gegeven: $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} p \\ -p-2 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow p + p + 2 = 0 \Leftrightarrow p = -1$. Conclusie: voor $p = -1$ geldt $V \perp A_pV$.

Over de auteur:

Geboren op 29 april 1947 te Harlingen.
Na het behalen van het H.B.S.-B diploma in 1964 volgde hij een studie in de wiskunde aan de R.U. in Groningen, waar in 1970 de akte wiskunde M.O.-B werd behaald.
Momenteel als docent wiskunde verbonden aan de R.S.G. Steenwijk.

Verslag van het verenigingsjaar 1 augustus 1977-31 juli 1978

Het bestuur was dit jaar als volgt samengesteld: voorzitter dr. Th. J. Korthagen, secretaris drs. J. W. Maassen, penningmeester drs. J. van Dormolen, overige leden L. Bozuwa, F. F. J. Gaillard, C. Th. J. Hoogsteder (sinds oktober), M. Kindt, F. J. Mahieu en dr. P. G. J. Vredenduin (tot oktober).
Dr. P. G. J. Vredenduin is bij zijn vertrek uit het bestuur van de vereniging wegens zijn vele verdiensten voor het wiskundeonderwijs en de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren tot erelid van de vereniging benoemd.
De samenwerking met de Vlaamse Vereniging van Wiskundeleraars is dit jaar voortgezet. Op 10 september vond een gemeenschappelijke bestuursvergadering plaats in Middelburg en op 18 maart werd een gezamenlijke studiedag voor leden van beide verenigingen gehouden in Breda, waarbij het onderwerp was: 'Gebruik en misbruik van variabelen en kwantoren'. Vlaamse bestuursleden waren aanwezig op de jaarvergadering van de NVvW, terwijl Nederlandse bestuursleden aanwezig waren op de jaarvergadering van de VVWL.
Op 3 september zijn in Utrecht forumbijeenkomsten over de wiskundeeindexamens 1977 gehouden voor HAVO en VWO.
De jaarvergadering is gehouden in het gebouw van de SOL te Utrecht op 29 oktober. Het centrale thema was: 'Handelen om te begrijpen'.
De regionale examenbesprekingen zijn dit jaar uitgebreid tot HAVO en VWO. Op 26 mei waren er op 6 plaatsen bijeenkomsten voor LBO-C/MAVO-3, op 29 mei waren er op 6 plaatsen bijeenkomsten voor HAVO en VWO-wiskunde I, op 2 juni waren er op 29 plaatsen bijeenkomsten voor MAVO-4 en was er in Utrecht een centrale bijeenkomst voor VWO-wiskunde II.
De didactiekcommissie heeft weer verscheidene meerdaagse cursussen voor docenten georganiseerd.
Dit jaar verschenen het 'Vademecum voor de wiskundeleraar' onder redactie van dr. P. G. J. Vredenduin, de bundel 'Verscheidenheden' van prof. dr. O. Bottema en de publikatie 'Handelen om te begrijpen' van drs. G. Zwaneveld en drs. J. van Dormolen in samenwerking met de didactiekcommissie.
Het bestuur vergaderde dit jaar negen maal, waaronder eenmaal met de inspecteurs drs. W. E. de Jong, P. Lafeber en drs. B. J. Westerhof.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren.

Internationale Wiskunde Olympiade 1978

eerste dag, beschikbare tijd: 4 uren

1 Gegeven zijn twee natuurlijke getallen m en n, $n > m \geqq 1$, zo, dat in decimale notatie de laatste drie cijfers van 1978^m en 1978^n overeenstemmen.
Bepaal m en n zo, dat $m + n$ minimaal is.

2 P is een gegeven punt binnen een gegeven bol. A, B en C zijn drie punten op de bol zo, dat PA, PB en PC onderling loodrechte lijnstukken zijn. Q is het hoekpunt van het blok opgespannen door de lijnstukken PA, PB en PC zo, dat PQ een lichaamsdiagonaal is.
Bepaal de verzameling van alle punten Q als A, B en C variëren.

3 De verzameling van alle positieve gehele getallen is de vereniging van twee onderling disjuncte verzamelingen

$$\{f(1), f(2), \ldots, f(n), \ldots\} \quad \text{en}$$
$$\{g(1), g(2), \ldots, g(n), \ldots\}, \quad \text{met}$$

$$f(1) < f(2) < \ldots < f(n) < \ldots,$$
$$g(1) < g(2) < \ldots < g(n) < \ldots$$

en $\quad g(n) = f(f(n)) + 1$ voor alle $n \geqq 1$.
Bepaal $f(240)$.

tweede dag, beschikbare tijd: 4 uren

4 In driehoek ABC is $AB = AC$.
Een cirkel raakt inwendig aan de omgeschreven cirkel van driehoek ABC en bovendien de zijde, AB in een punt P en de zijde AC in een punt Q.
Bewijs dat het midden van het lijnstuk PQ het middelpunt is van de ingeschreven cirkel van driehoek ABC.

5 De rij $\{a_k\}$, $k = 1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$ bestaat uit onderling verschillende positieve gehele getallen.
Bewijs, dat voor elke waarde van n geldt:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k^2} \geqq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

6 De leden van een internationaal genootschap komen uit 6 verschillende landen. De ledenlijst bevat 1978 namen, genummerd 1 t/m 1978.
Bewijs dat er tenminste één lid is wiens nummer gelijk is aan de som van de nummers van twee van zijn landgenoten of tweemaal zo groot als het nummer van één van zijn landgenoten.

Verwoorden en verstaan

*Bespreking van het proefschrift van H. H. TEN VOORDE**

G. KROOSHOF

Het zal wellicht enige verbazing wekken dat in het tijdschrift voor de didaktiek van de *wiskunde* een bespreking wordt gewijd aan een poging tot vernieuwing van het *scheikunde*-onderwijs.
In de eerste plaats echter moeten we de klemtoon anders leggen: in dit proefschrift wordt gesproken over scheikunde-*onderwijs*, de ontwikkeling daarvan kan exemplarisch zijn voor andere vakdidaktieken, bijvoorbeeld de wiskundedidaktiek.
Bovendien is de werkgroep die deze leer- en onderwijsgang voor de scheikunde heeft ontworpen geïnspireerd geweest door gedachten die ontwikkeld werden in de Wiskunde Werkgroep van de WVO en in het bijzonder door de proefschriften van het echtpaar Van Hiele.

Gesprekspartner in de vergaderingen van de wiskunde werkgroep was o.a. J. de Miranda, van huis uit scheikundige, maar geïnteresseerd in de didaktiek van de wiskunde; hij hielp een wiskundemethode voor de MMS ontwikkelen, samen met de Van Hiele's en ondergetekende. (1955-'59)

Het was De Miranda die samen met J. F. Roest de Werkgroep Empirische Inleiding (WEI) oprichtte (1963) met het doel een nieuwe leergang voor het eerstejaar-scheikunde te ontwerpen. Algemeen was namelijk een gevoel van onbehagen over de vroegtijdige invoering van het korpuskulaire stelsel, waardoor formalisme en verbalisme in de hand werden gewerkt.

Deze te vroege invoering van een theoretisch concept kan worden vergeleken met de situatie in het meetkundeonderwijs vóór het invoeren van de intuïtieve inleiding.

In navolging van Van Hiele onderscheidde de WEI drie denkniveaus**.

*) *Verwoorden en verstaan*. Een algemeen didaktisch, empirisch onderzoek naar de mogelijkheid om onderwijs, didaktiek en onderwijsbeleid 'uitleidend' te ontwikkelen (op basis van vernieuwing in scheikundeonderwijs) 24 juni 1977. Uitgave SVO, Pletterijkade 50, 2515 SH 's-Gravenhage.

**) Als resultaat van discussies tussen Van Hiele en De Miranda ging eerstgenoemde er toe over (1959) om niet meer te spreken van 'denkniveaus' maar van 'niveaus van argumentatie'. Door laatstgenoemde werd dit begrip verder ontwikkeld tot 'niveaus van produktief gesprek'.

Het zijn:
het grondniveau (G)
het beschrijvend niveau (B)
het theoretisch niveau (T)
Later wordt deze indeling nog wat verfijnd.
Ieder niveau heeft zijn eigen taal. Wanneer een leraar een leerling toespreekt in de taal van het theoretisch niveau (en tijdens zijn opleiding heeft hij slechts deze taal gesproken) terwijl de leerling zich nog 'op het beschrijvende niveau' (of daarvóór) bevindt, dan verstaat de leerling de leraar niet.

De initiatiefnemers van de WEI (Roest en De Miranda) hebben vóór het ontstaan van deze werkgroep al een leerperiode doorgemaakt waardoor ze zich bij de oprichting op een hoger niveau van argumentatie van de didaktiek bevonden dan de andere leden van de WEI. Ten Voorde maakt daarom onderscheid tussen de 'langerlerenden' en de 'korterlerenden' in de WEI.
Men zou kunnen verwachten dat de 'langerlerenden' de 'korterlerenden' slechts hoefden te instrueren, maar dat is onmogelijk omdat de beide groepen zich op een verschillend niveau van argumentatie bevinden.
Dit is in overeenstemming met de ervaring waarover Dieke van Hiele-Geldof in haar proefschrift schreef:
'De taalmoeilijkheden die de *kinderen* ondervinden in de *meetkunde* kunnen vergeleken worden met die welke *ik* doormaakte tijdens de studie van *mijn* didaktiek.'

Er blijken dus in het experiment van de WEI twee leer- en onderwijsprocessen plaats te vinden die beide het karakter hebben van 'niveau-verhogend-onderwijs'. Namelijk het scheikundige onderwijs- en leerproces van de leerlingen en het didaktische onderwijs- en leerproces van de WEI-leden.
Het is de ontwikkeling van deze twee onderwijs- en leerprocessen die door Ten Voorde uitvoerig beschreven en becommentarieerd wordt. Hij laat daarbij niet na ook de teleurstellende ervaringen te vermelden. In zekere zin zijn deze essentieel bij de genoemde processen. Juist door de negatieve ervaringen ontstaat op den duur een soort krisistoestand, die de stap naar het hogere niveau bevordert. De leraar moet zijn leerlingen dan ook zodanig begeleiden dat de krisistoestand niet vermeden wordt. Dit begeleiden vindt voornamelijk plaats in de vorm van gesprekken waarbij leraar en leerling gelijkberechtigd zijn. Ze zijn elkaars medewerkers, zoals in de WEI langer- en korterlerenden elkaars medewerkers zijn.
Het blijkt dat in beide gevallen de medewerkers een sterk beroep doen op het geduld en doorzettingsvermogen van de ander. Desondanks wordt (1965) besloten het experiment niet af te sluiten aan het eind van het eerstejaar-scheikunde, maar door te gaan. Dit betekent het voortdurend produceren (vooral door de langerlerenden) van telkens weer nieuwe versies van de leergang. (1965-'67) Het betekent voor de korterlerenden een steeds verdergaande ontdogmatisering, het ter diskussie stellen van de taal waarin men gewend was als scheikundige te communiceren, een taal die voor de leerlingen geheimtaal is. Vragen als 'behoort dit nu tot het beschrijvende niveau of is hiervoor een theo-

retische kontekst vereist?' komen herhaaldelijk in de WEI aan de orde. Deze chemische en didaktische ontdogmatisering was de basis voor het didaktisch onderzoek (1968-'77) waarvan in dit proefschrift verslag wordt uitgebracht.

Veel geduld en doorzettingsvermogen wordt ook geeist van de lezer van deze twee dikke banden met in het totaal ruim 950 bladzijden. De schrijver heeft zijn best gedaan het geheel zo leesbaar mogelijk te maken. Maar misschien zou het aanbeveling verdienen om voor de man voor de klas, die nog wel andere dingen te doen heeft dan een dissertatie te lezen een beknoptere uitgave te maken. Het zou jammer zijn als hij er geen kennis van zou nemen.

Recreatie

Nieuwe opgaven met oplossingen en correspondentie over deze rubriek aan Dr. P. G. J. Vredenduin, Dillenburg 148, 6865 HN Doorwerth.

Opgaven

393. a Een taal gehoorzaamt aan de volgende regels:
symbolen zijn a, b, c, d, $+$, $*$
termen zijn a, b, c, d
als t_1 en t_2 termen zijn, dan zijn ook $+t_1t_2$ en $*t_1t_2$ termen.
Hoeveel verschillende termen bestaan uit p symbolen?
b Een taal gehoorzaamt aan de volgende regels:
symbolen zijn a, b, c, d, $+$, $*$, (,)
termen zijn a, b, c, d
als t_1 en t_2 termen zijn, dan zijn ook $(t_1 + t_2)$ en $(t_1 * t_2)$ termen.
Hoeveel verschillende termen bestaan uit p symbolen?

394. Iemand heeft 1000 brieven genummerd 000 tot en met 999 en 100 brievenbussen genummerd 00 tot en met 99. Van elke brief schrapt hij een door hem te kiezen cijfer, waardoor de brief een nummer overhoudt dat nog maar uit twee cijfers bestaat. Nu doet hij de brief in de gelijkgenummerde bus. Zo kan hij brief 093 naar believen doen in bus 09, 03 of 93. Hoeveel brievenbussen heeft hij minimaal nodig om de brieven in te doen?
Dezelfde vraag voor 10^4 brieven genummerd 0000 tot en met 9999 waarvan twee cijfers geschrapt worden, voor 10^5 brieven waarvan drie cijfers geschrapt worden enz.
(Meegedeeld door R. Troelstra.)

Oplossingen

391. In een convexe n-hoek worden alle diagonalen getrokken. De zijden en de diagonalen kleuren we zo, dat elke driehoek (waarvan de hoekpunten hoekpunten van de n-hoek zijn) drie verschillend gekleurde zijden krijgt. Hoeveel kleuren zijn hiervoor minstens nodig?
Het probleem is gelijkwaardig met het volgende. De zijden en diagonalen worden zo gekleurd, dat in geen enkel hoekpunt twee (of meer) lijnstukken met dezelfde kleur samenkomen.
Dit probleem is weer isomorf met het volgende. Gegeven n clubs. Deze spelen een halve competitie. Hoeveel ronden zijn hiervoor minimaal nodig? De kleuren corresponderen met de ronden.
Zoals bekend, is hierop het antwoord: $n-1$ als n even is, en n als n oneven is.
Voor wie de oplossing van dit probleem niet bekend is, volgt hier bij wijze van voorbeeld de rondenindeling bij $n = 12$.

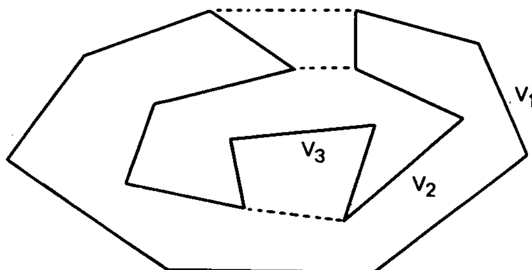
x	1	3	5	7	9	11	10	7	6	4	2
	x	2	4	6	8	10	11	9	8	5	3
		x	1	3	5	7	9	11	10	7	6
			x	2	4	6	8	10	11	9	8
				x	1	3	5	7	9	11	10
					x	2	4	6	8	10	11
						x	1	3	5	7	9
							x	2	4	6	8
								x	1	3	5
									x	2	4
										x	1
											x

392 In een plat vlak liggen n punten, niet alle op één lijn. Noem één van de punten A_1 en verbind dat met een van de andere, A_2. Ga zo door en verbind ten slotte A_n met A_1. Is dit zo mogelijk, dat geen twee van de lijnstukken een inwendig punt gemeen hebben?

Het convex omhulsel van de verzameling punten is een veelhoek V_1. Beschouw nu de puntverzameling verminderd met de punten die op V_1 liggen. Neem hiervan weer het convexe omhulsel V_2. Ga zo door. We krijgen zo een serie veelhoeken V_1, V_2, . . ., V_i, waarvan V_i ook een lijnstuk of een punt kan zijn.

Verwijder nu uit V_1 en uit V_2 op geschikte manier één lijnstuk en verbind de vrijgekomen hoekpunten van V_1 met de vrijgekomen hoekpunten van V_2 zo, dat de verbindingslijnstukken elkaar niet snijden. Dit procédé zetten we voort, waardoor het gewenste resultaat ontstaat.

In onderstaande figuur wordt het nog toegelicht.



Boekbesprekingen

W. J. Gilbert, *Modern Algebra with Applications*, John Wiley & Sons Ltd, Chichester, Sussex, 1977, 348 blz., £ 16,45.

Het voor ons liggende boek is een belangrijk werk voor diegenen die tegelijk met de bestudering van de moderne algebra geïnformeerd willen worden over de toepassingen van de theorie. Toepassingen die zeker de laatste jaren sterk in aantal toenemen, zowel in natuur- en scheikunde als in nieuwere gebieden van de wiskunde w.o. bijv. de combinatoriek. Al in het begin krijgt de lezer een verscheidenheid van toepassingen aangeboden. Van de toepassingen noem ik: Boole'se algebra, schakelcircuits, symmetriegroepen in de driedimensionale ruimte, Pólya-Burnside methode, latijnse vierkanten, meetkundige constructies, error-correcting codes. Natuurlijk worden de normale onderwerpen ook, en vrij diepgaand, behandeld: groepen, factorgroepen, monoïden, ringen, lichamen, polynoomringen, Euclidische ringen, quotiëntenringen, lichaamsuitbreidingen.
Vele opgaven begeleiden de tekst. Van de oneven nummers zijn de antwoorden met aanwijzingen achterin het boek opgenomen, hetgeen de zelfstudie stellig zal bevorderen. Ook de opgenomen literatuurlijst kan hiertoe een bijdrage leveren. De lijst met gebruikte symbolen (met paginanummers) en de uitvoerige index verhogen de bruikbaarheid van het boek.
Het ware te wensen, dat bijv. MO-A kandidaten, tweede-graads leraren, kandidaten in de wiskunde de algebra beheersen in de context zoals in dit boek gegeven. Van harte aanbevolen.

W. Kleijne

E. Kühner, P. Lesky, *Grundlagen der Fuktionalanalysis und Approximationstheorie*, serie 'Moderne Mathematik in elementarer Darstellung' nr 17, Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen, 1977, 216 blz.

Dit boek is de neerslag van een cursus functionaal-analyse en approximatietheorie voor leraren wiskunde in Duitsland m.h.o. op het aanbrengen van de noodzakelijke kennis teneinde deze onderwerpen ook in de school te kunnen introduceren. Als voorkennis veronderstelt men kennis van een behoorlijk stuk lineaire algebra en reële analyse. Allereerst worden enkele elementaire grondbegrippen uit de functionaal-analyse besproken. Hierbij voeren de schrijvers Hilbert- en Banachruimten in, waarna de theorie van Fourrierreeksen in Hilbertruimten en approximatie in Banachruimten volgen. Vele uitgewerkte voorbeelden lichten e.e.a. toe. De volgende opsomming van de titels der hoofdstukken kan een indruk van het geheel geven. 1. Metrische Räume; 2. Vektorräume; 3. Normierte Vektorräume; 4. Skalarprodukträume; 5. Approximation in endlichdimensionalen skalarprodukträume und normierten Vektorräume; 6. Grenzwerte, Vollständigkeit, Stetigkeit; 7. Approximation in unendlichdimensionalen Skalarprodukträume; 8. Approximation in unendlichdimensionalen normierten Vektorräume; 9. Ausblicke. Tot slot nog een literatuuropgave en een register.
Samengevat een goede inleiding tot de genoemde gebieden.

W. Kleijne

P. M. Cohn, *Algebra*, Volume 2, John Wiley & Sons, Londen, 1977, 483 blz., £ 8,95.

Dit tweede deel van 'Algebra' van Cohn geeft wat meer geavanceerde onderwerpen uit de algebra in de volgende hoofdstukken:
natural numbers, cardinal numbers, ordinal numbers; lattices; tensor products; homological algebra; Galois theory; further field theory; real fields; quadratic forms; valuation theory; Artinian rings; commutative rings; Noetherian and polynomial identities.
Het boek wordt besloten met een vrij uitgebreide literatuurlijst, een lijst van de gebruikte notaties

en een register. Na iedere paragraaf zijn enige opgaven opgenomen. De uitvoering van het boek is keurig.
Een uitstekend leerboek der algebra.

W. Kleijne

SMP *Teacher's Guide for Cards* I & II, Cambridge University Press, Cambridge London New York Melbourne, 1978, 376 blz., £15.–.

De SMP Cards voor de leeftijdsgroep 7–13 zijn uitvoerig besproken in Euclides 53, no. 4, blz. 135–139. De daarbij behorende handleiding voor de teachers is een lijvig en zeer fraai uitgevoerd boekwerk van 376 bladzijden met afmeting 30 × 21 cm. Alle kaarten zijn er nogmaals in afgedrukt op verkleind formaat met daaronder de antwoorden en waar gewenst een korte toelichting betreffende het te gebruiken materiaal en de moeilijkheden die zich bij de leerlingen kunnen voordoen. Voorafgaande aan elk hoofdstuk is een uiteenzetting van de bedoeling ervan gegeven.

P. G. J. Vredenduin

Warren Brisley, *Grundbegriffe der linearen Algebra*, deel 16 uit de serie 'Moderne Mathematik in elementarer Darstellung', Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen, 1977, 257 blz., DM 32,–.

Dit boek is de vertaling van het in 1973 verschenen Engelse werk 'A basis for linear algebra'. Het geeft voor beginnende wiskundestudenten een behoorlijke inleiding in dit vakgebied. De schrijver besteedt veel aandacht aan homomorfismen van vectorruimten.
Een en ander wordt vastgelegd in een kern-beeld diagram. Inzicht in deze zaken is van groot belang voor vele gebieden in de wiskunde tot differentiaalvergelijkingen toe, maar ook wordt hierdoor het leren van een aantal 'recepten' overbodig. Van hieruit wordt op natuurlijke wijze gewerkt naar de fundamentele regel, dat de kolommen van een matrix de coördinaten geven van de beelden (onder het betreffende homomorfisme) van de basisvectoren van de ruimte. Wie dit begrepen heeft, heeft geen moeite meer met het begrip coördinaten-transformatie.
In 11 aanhangsels gaat de schrijver nog iets dieper in op een aantal deelproblemen zoals equivalentierelaties, volledige inductie, permutaties, symmetrische en alternerende groepen, logica.
De opgaven vormen een integrerend deel van het boek. De oplossingen zijn achterin het boek opgenomen.
Een goed boek voor ieder die op een gedegen wijze in dit vakgebied ingeleid wil worden.

W. Kleijne

Norman L. Johnson and Samuel Kotz, *Urnmodels and their applications: An approach to modern discrete probability theory*, Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics, £ 16.45.

Van beide auteurs verschenen reeds in dezelfde serie een viertal boeken over kansverdelingen. Daarin werden veel kansverdelingen beschreven tesamen met hun kenmerkende eigenschappen en situaties waarin ze optreden.
De auteurs hebben nu een soortgelijke samenvatting van urnmodellen geschreven. Urnmodellen zijn de eenvoudigste modellen uit de diskrete waarschijnlijkheidsrekening. We hebben (een of meer) urnen met (een of meer soorten) knikkers. Uit deze urnen kan men op verschillende manieren knikkers trekken. Bijvoorbeeld met of zonder teruglegging, met teruglegging van meer knikkers van dezelfde soort etc. In dit boek worden voor deze situaties de kansverdelingen en hun verdere eigenschappen afgeleid.
Urnmodellen lenen zich bij uitstek ter illustratie van begrippen als aselekte trekking, paarsgewijze onafhankelijkheid, onderlinge onafhankelijkheid e.d. Ook zijn zij bruikbaar voor het afleiden van de kansverdelingen behorend bij een systeem van een groot aantal deeltjes in een ruimte, zoals in

de statistische mechanica wordt gedaan. Wij noemen de Boxe-Einstein, Fermi-Dirac en MaxWell-Boltzmann verdelingen.
Het boek geeft veel resultaten, ook uit de afgelopen jaren, en aan het eind van elk hoofdstuk een uitgebreide lijst van referenties. Een waardevol boek voor de specialist en elke bibliotheek. Maar voor een eerste kennismaking geeft uw recensent de voorkeur aan het eerste boek van Feller dat in dezelfde serie is verschenen.

J. L. Mijnheer

Ir J. J. van Amstel, ir J. Bomhoff, ir G. J. Schoenmakers, *Inleiding tot het programmeren* (verder genoemd *Inleiding*).
J. J. van Amstel (red.), EIT *Diktatenserie* (hierna genoemd *Serie*), 1 *Computers en Programmeren* (verder genoemd *Computers*), 2 *Programmeerproblemen, technieken en opgaven* (verder genoemd *Programmeerproblemen*), 3 *Basic* (hierna genoemd *Basic*), uitgave Academic service.

Voor ons liggen vier uitgaven van de Academic Service ter bespreking. *Inleiding* is bedoeld als materiaal bij de cursussen programmeren van de TH Eindhoven en is een op zichzelf staande uitgave. De overige drie deeltjes vormen de *Serie* en zijn geschreven door medewerkers van het EIT te Tilburg.
Men ontkomt er niet aan de vier deeltjes tegelijk te bezien. Niet alleen vormen de auteurs van *Inleiding* een deelverzameling van de *Serie*, maar bovendien komt de inhoud van *Inleiding* voor een niet onbelangrijk deel letterlijk overeen met die van *Computers*.
De *Serie* is geschikt studiemateriaal voor degenen die zich willen verdiepen resp. bekwamen in het gebruik van computers. Lezers met een wiskundige opleiding zullen niet al te veel moeite hebben met het zich eigen maken van de betrekkelijke lawine van notaties en declaraties die het tweede hoofdstuk van *Computers* vormt. Het derde hoofdstuk hiervan introduceert het begrip 'programma', ruim voorzien van juist gekozen voorbeelden. Lezers die bekend zijn met ALGOL 60 zullen in dit hoofdstuk veel bekende zaken ontmoeten.
Merkwaardig is het feit, dat men zowel in *Inleiding* als in *Computers* al meteen in het begin afstand doet van het gebruik van de programma stroomschema techniek. In de wetenschap dat het gebruik van deze techniek voor modern programmeren inderdaad al een paar jaar ter discussie staat, kan men daar vrede mee hebben.
Twee vragen blijven in dit verband dan onbeantwoord:
- waarom wordt in *Programmeerproblemen* wel zeer frequent gebruik gemaakt van dergelijke schema's, zonder zelfs andere technieken te noemen?
- Waarom introduceert men volgens het 'oude schoenen' principe in *Inleiding* geen andere techniek, die beter aansluit bij het gestructureerd programmeren? Een goed voorbeeld van hoe het wèl moet kan men b.v. aantreffen in een sortgelijk boekje 'Inleiding Informatica', uitgegeven bij de DUM.

Overigens verdient dit Delftse geschrift t.o.v. *Inleiding* in meer opzichten de voorkeur voor een ongeoefende lezer. Het terrein van het gestructureerd programmeren is door het bewust formaliseren van het programmeerproces toch al niet eenvoudig te betreden zonder deskundige bijstand. *Inleiding* is daarom naar onze mening daarom ongeschikt voor zelfstandige bestudering. Het heeft bovendien nog het nadeel dat een bewust gekozen niet bestaande programmeertaal is gebruikt. Dit moge in wetenschappelijk opzicht aardig voldoen, voor een inleiding is het ongeschikt.
We beperken deze bespreking daarom verder tot de *Serie*.
Hoofdstukken 4, 5 en 6 van *Computers* behandelen de computerachtige aspecten, zoals de onderdelen van een computer, programmeertalen en geschiedenis. Men kan deze zaken weliswaar uitgebreider en beter geïllustreerd in andere boeken aantreffen, maar voor de lezer die uitsluitend geïnteresseerd is het programmeren is het juist voldoende.
Het deeltje *Programmeerproblemen* bevat zeer veel praktische voorbeelden. Met name op het sorteren en het gebruik van bestanden wordt veel nadruk gelegd. Het was wellicht goed geweest, te benadrukken, dat de grote variatie in behandelde sorteertechnieken slechts als oefening is bedoeld en dient ter illustratie van het vaak verwaarloosde efficiency aspect van het programmeren. De

ongeoefende lezer zou nu licht de indruk krijgen, dat computers voornamelijk worden gebruikt om op alle mogelijke en onmogelijke wijzen te sorteren.
De ruime verzameling opgaven voor het oefenen van het geleerde in hoofdstuk 10 biedt voldoende variatie om allerhande technieken te leren kennen. De insider herkent hieronder een groot aantal problemen uit de examens van de Stichting Studiecentrum Novi te Amsterdam. Het moet worden betreurd, dat er geen uitwerkingen voor de opgaven gegeven zijn. Lezers die een probleem door een enkele drempel niet direkt zien, blijven van de rest van de opgave verstoken. Anderzijds kan de lezer niet nagaan of zijn oplossing in grote trekken overeenkomt met de juiste methode. Wellicht een suggestie voor de auteurs?
Het boekje *Basic* tenslotte behandelt de programmeertaal BASIC. Het is niet meer dan een taalbeschrijving, geïllustreerd met voorbeelden. Hoewel het boekje volgens de inleiding zou aansluiten bij de in NPR 3519 beschreven 'standaard' voor BASIC is dit niet consequent volgehouden. De in hoofdstuk 6 genoemde tekst manipulaties behoren niet tot die standaard. Men had ze beter in een appendix kunnen onderbrengen, zoals dat is gedaan met de matrix operaties.
Concluderend kunnen we stellen, dat de serie geschikt is voor het verkrijgen van een basis vaardigheid in het programmeren, onder het voorbehoud dat men in staat is, een voldoend aantal programma's zelf te oefenen op een computer (terminal). In dit verband moet men bij de bestudering van *Basic* ook de beschrijving van de betreffende computer betrekken, om de hiervoor geldende implementatie afwijkingen van BASIC te leren kennen.

Ir. H. J. A. M. Bodelier

Mededeling

Afscheid Dr. Ir. B. Groeneveld

Op zondag 26 november 1978 hoopt Dr. Ir. B. Groeneveld, die gedurende negen jaar voorzitter is geweest van de Vereniging voor Wiskundeleraren, de leeftijd van 65 jaar te bereiken.
Tevens herdenkt hij dan het feit, dat hij 40 jaar geleden zijn carrière als wiskundeleraar begon. Vanaf 1 maart 1939 is hij verbonden aan het Lorentz-Lyceum.
Om zijn pensionering luister bij te zetten biedt het Bestuur van het Lorentz-Lyceum de heer Groeneveld een receptie aan. Belangstellenden zijn van harte welkom op **zaterdag 25 november** tussen 12.00 en 14.00 uur in het schoolgebouw, Celebeslaan 20, Eindhoven.

Namens de afscheidscommissie, F. Sluiter.

INHOUD:

ADRESSEN AUTEURS:

Fred Goffree, Bremlaan 16, 3735 KJ Bosch en Duin.

J. de Jager, Veluwelaan 44, 8443 AE Heerenveen.

G. Krooshof, Dierenriemstraat 12, 9742 AH Groningen.

Cheng Shan-Hwei en J. W. Nienhuys, TH Eindhoven, Postbus 513, 5600 MB Eindhoven

P. G. J. Vredenduin, Dillenburg 148, 6865 HN Doorwerth.